

סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס סטטיסטיקה א'. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](#).

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר www.gool.co.il.



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול זה בול. בשבילך!

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.Gool.co.il

כתב ופתר - ברק קנדל ©

תוכן

פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית - הקדמה	3
פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית - הצגה של נתונים	6
פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית - סכימה	12
פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי	15
פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור: הטווח, השונות וסטיית התקן	23
פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות מהתציון	27
פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - ציון תקן	30
פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית	33
פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות	36
פרק 10 - בעיות בסיסיות בהסתברות	40
פרק 11 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים	45
פרק 12 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד	55
פרק 13 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה	58
פרק 14 - תלות ואי תלות בין מאורעות	64
פרק 15 - שאלות מסכמות בהסתברות	67
פרק 16 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות	70
פרק 17 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן	74
פרק 18 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית	78
פרק 19 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית	81
פרק 20 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית	86
פרק 21 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות פואסונית	90
פרק 22 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות	94
פרק 23 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית	97
פרק 24 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי	106

פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית - הקדמה

רקע:

בסטטיסטיקה תיאורית אנו חוקרים קבוצה מסוימת.
 הקבוצה יכולה להיות קבוצת ילדים בגן, קבוצת מניות בתיק, כלל התושבים בעיר מסוימת וכולי.
 בין ישות לישות בקבוצה ישנם גורמים היכולים לקבל מספר ערכים. גורמים אלה נקראים משתנים.
 למשל, בין מניה למניה בתיק משתנה התשואה היומית של המניה, הוותק של המניה, תחום המניה וכדומה.

בסטטיסטיקה תיאורית אנחנו נתבונן בקבוצה מסוימת ובתוך הקבוצה הזו נאסוף נתונים לגבי משתנה מסוים ונלמד להציג את הנתונים ולנתח אותם מכל מיני אספקטים.

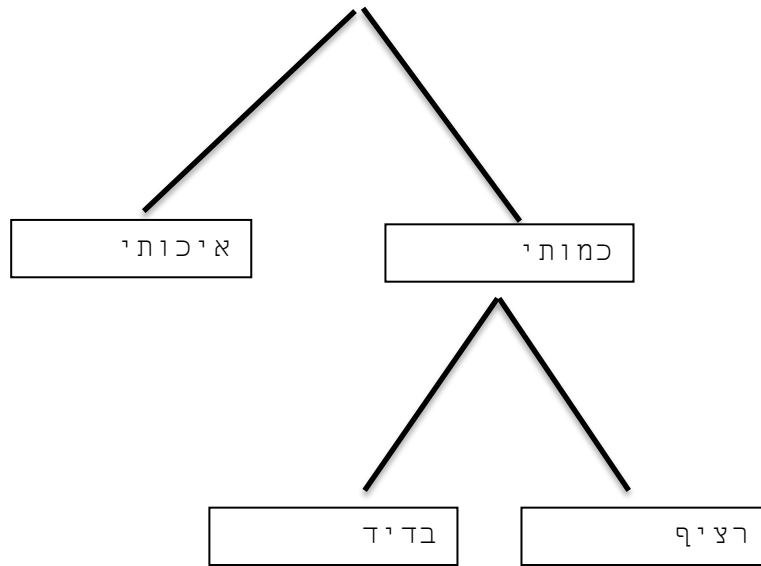
דוגמה:

בתיק מניות 10 מניות. מנהל התיק פרסם את התשואה של כל מניה בשנת 2011.

מי הקבוצה הנחקרת?

מה גודל הקבוצה?

מה המשתנה הנחקר?

סוגי משתנים:

משתנה איכותי הוא משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים.

כמו: מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..)

מין האדם (זכר, נקבה)

מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן)

משתנה כמותי הוא משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו: גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה.

את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים:

משתנה בדיד: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו: מספר ילדים למשפחה (1,2,3..)

ציון בבחינה (מ 0 ועד 100 בקפיצות של 1)

הערה:

משתנה רציף: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים, הערכים מתקבלים ברצף וללא קפיצות של ערכים.

כמו: גובה בס"מ – אם למשל, הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ועד 190 ס"מ בקבוצה הגבהים הם ברצף. גם בין 160 ל 161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים לגובה (160.33 ס"מ הוא גם גובה אפשרי)

משקל בק"ג, מהירות בקמ"ש וכולי.

תרגילים:

1. סווג את המשתנים הבאים לפי: איכותי / כמותי בדיד / כמותי רציף:
- מספר הדירות בבניין.
 - גיל אדם בשנים.
 - אחוז האבטלה בעיר.
 - מקצוע לימוד מועדף.

2. להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר".
בחברה 200 עובדים.

מספר העובדים	מספר האיחורים
17	0
23	1
85	2
50	3
25	4

- מהו המשתנה הנחקר כאן?
 - האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי? אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?
3. לפניכם רשימה של משתנים כמותיים. ציין ליד כל משתנה אם הוא רציף או בדיד.
- שכר עובד בש"ח.
 - ציון בחינת בגרות.
 - תוצאה בהטלת קובייה.
 - מהירות ריצה בתחרות.
 - שיעור התמיכה בממשלה.

פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית - הצגה של נתונים

רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו :

א. רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות :

3 4 3 5 4

ב. טבלת שכיחויות בדידה:

שם המשתנה - X	שכיחות - $f(X)$	שכיחות יחסית באחוזים
X_1	f_1	$\frac{f_1}{N} \times 100$
X_2	f_2	$\frac{f_2}{N} \times 100$
X_3	f_3	$\frac{f_3}{N} \times 100$
\vdots	\vdots	\vdots
X_k	f_k	$\frac{f_k}{N} \times 100$
סה"כ	$N = \sum_{i=1}^k f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

למשל, להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת :

$\frac{f_i}{n}$	F_i	מספר התלמידים – השכיחות-f	הציון-X
$0.08=2/25$	2	2	5
$0.16=4/25$	6	4	6
$0.32=8/25$	14	8	7
$0.2=5/25$	19	5	8
$0.16=4/25$	23	4	9
$0.08=2/25$	25	2	10

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות: F_i - השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי: $\frac{f_i}{n}$ - איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.

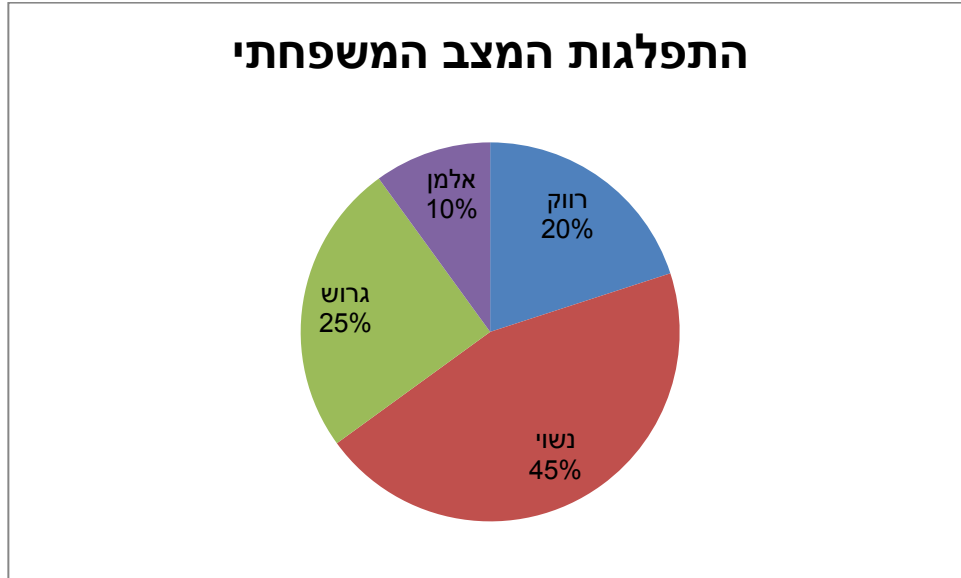
ג. טבלת שכיחויות במחלקות:

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.
למשל, נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות.
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

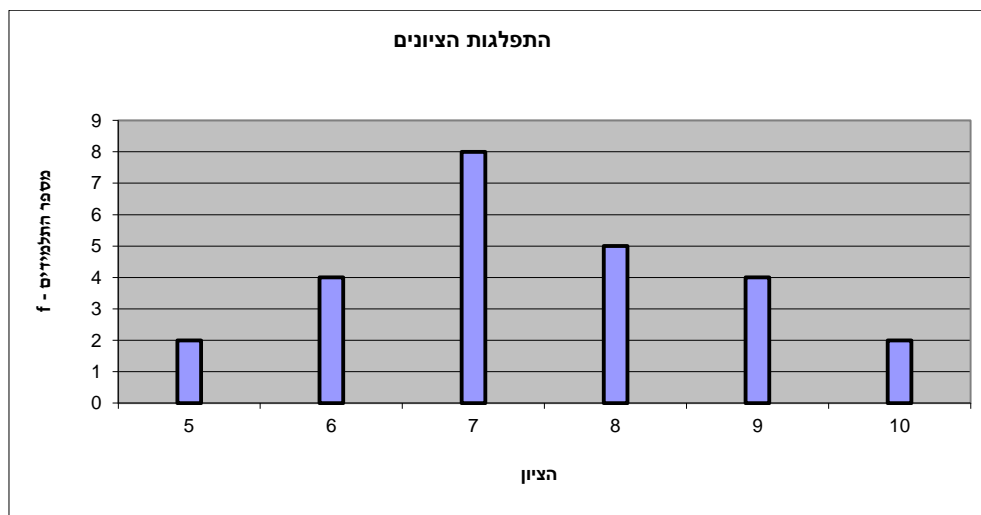
ד. דיאגרמת עוגה :

זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגרמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח" יחסי מהעוגה. הנתח בעוגה פרופורציוני לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.



ה. דיאגרמת מקלות :

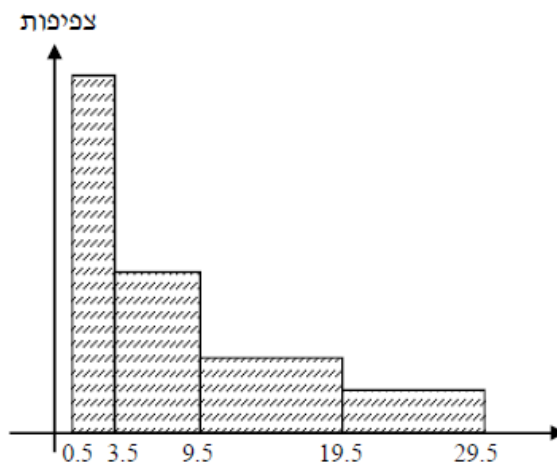
הציר האופקי הוא הציר של המשתנה הציר האנכי של השכיחות – הגובה של המקל מעיד על השכיחות .
 רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף .
 כמו כן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.



1. **היסטוגרמה:**

ההיסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות. רלבנטית למשתנה כמותי רציף. בהיסטוגרמה ציר האופקי הוא הציר של המשתנה וציר האנכי הוא הציר של הצפיפות. הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחידה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

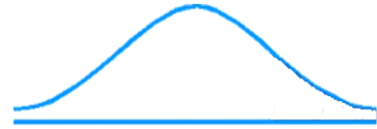
			אמצע	רוחב	X
צפיפות	מצטברת	שכיחות			
6.6667	20	20	2	3	0.5 - 3.5
3	38	18	6.5	6	3.5 - 9.5
1.4	52	14	14.5	10	9.5 - 19.5
0.8	60	8	24.5	10	19.5 - 29.5



פוליגון- מצולעון: אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים. נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

צורות התפלגות נפוצות

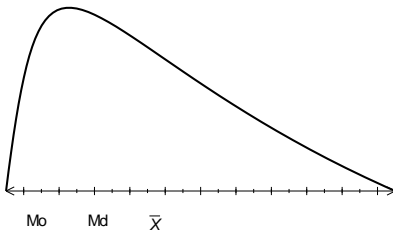
התפלגות סימטרית פעמונית- רוב התצפיות במרכז וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. למשל, ציוני IQ.



ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות:

התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) – רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. למשל, שכר במשק.

התפלגות א-סימטרית ימנית או חיובית



התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית) רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. למשל, אורך חיים.

התפלגות א-סימטרית שמאלית או שלילית



תרגילים:

1. בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו- 25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.
א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.
ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

2. להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

מספר התלמידים	המקצוע
44	מתמטיקה
20	תנ"ך
12	אנגלית
26	היסטוריה

- א. מהו המשתנה הנחקר?
ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

3. להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

מספר העובדים	השכלה
60	נמוכה
120	תיכונית
20	אקדמאית

- א. מהו המשתנה הנחקר? מאיזה סולם הוא?
ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

4. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:

7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6

- א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?
ב. תאר את הרשימה בטבלת שכיחות.
ג. הוסף שכיחות יחסיות לטבלה.
ד. תאר את הנתונים באופן גרפי.

פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית - סכימה

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת כדי לרשום סכום של תצפיות:

$$\sum_{i=1}^n X_i$$

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

i	X_i
1	5
2	0
3	1
4	3
5	2

תרגילים:

1. בבניין 5 דירות, לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה (X) ומספר הנפשות החיות בדירה (Y).

מספר דירה	X	Y
1	2	1
2	3	1
3	2	2
4	4	3
5	3	2

חשבו:

$$\sum_{i=1}^3 X_i$$

$$\sum_{i=1}^5 Y_i$$

$$\sum_{i=1}^4 X_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^4 X_i\right)^2$$

$$\sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i$$

$$\sum (X_i) \sum (Y_i)$$

2. נתון לוח ערכי המשתנים x_i ו y_i כאשר $i=1,2,\dots,6$

i	1	2	3	4	5	6
x_i	3	2	4	-2	1	4
y_i	2	0	0	1	-5	2

ונתונים הקבועים: $a=2$ $b=5$ חשבו את הנוסחאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^4 y_i \quad \text{א.}$$

$$\sum_{i=1}^6 a \quad \text{ב.}$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i y_i \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{i=1}^6 (x_i + y_i) \quad \text{ד.}$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i + a \quad \text{ה.}$$

3. קבע לכל זהות אם היא נכונה:

$$\sum_{i=1}^n bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{א.}$$

$$\sum_{i=1}^n a = a \cdot n \quad \text{ב.}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad \text{ג.}$$

פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי

רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

השכיח – MODE

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

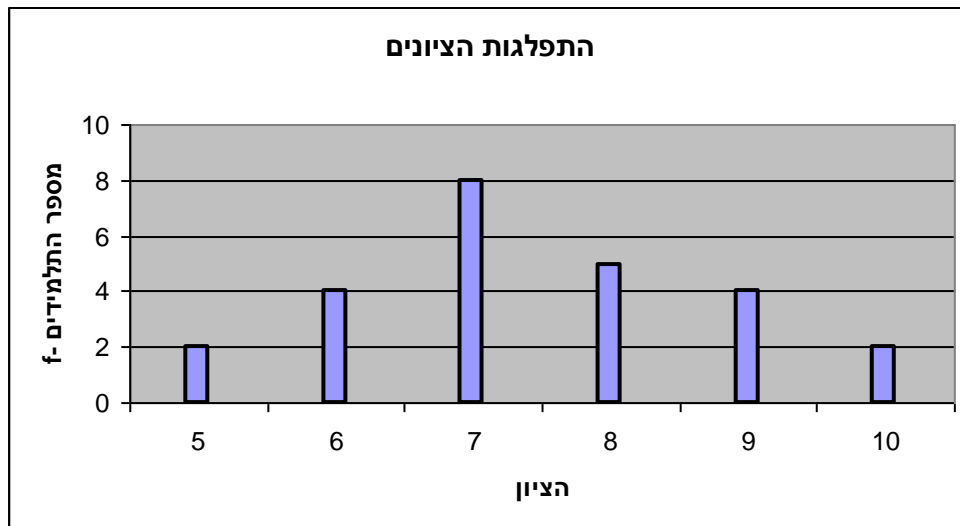
ברשימה : הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים .

7 9 4 8 4 10 6

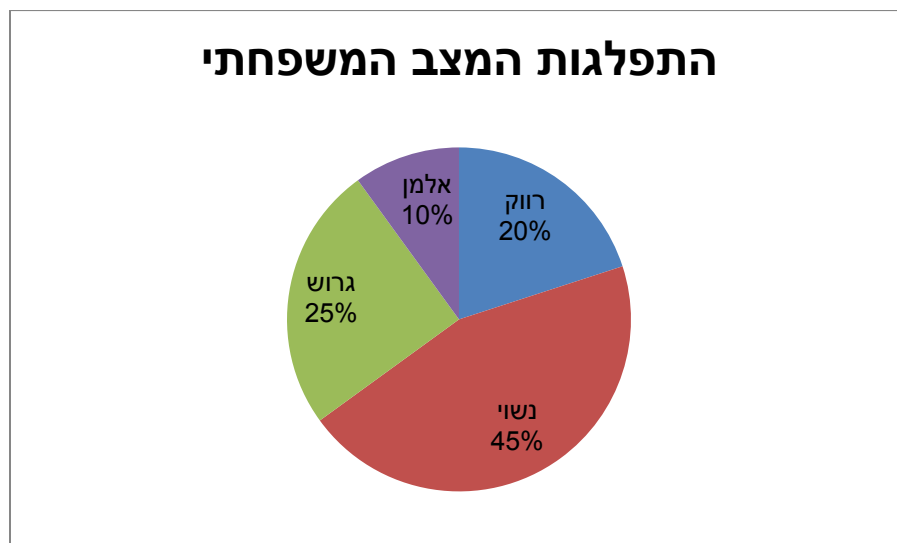
בטבלת שכיחויות בדידה : הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

# תכניות החיסכון	$f(x)$
0	100
1	75
2	25
3	25
4	25

בדיאגרמת מקלות : שיעור ה- X של המקל הגבוה ביותר.



בעוגה: הערך של הפלח הגדול ביותר.

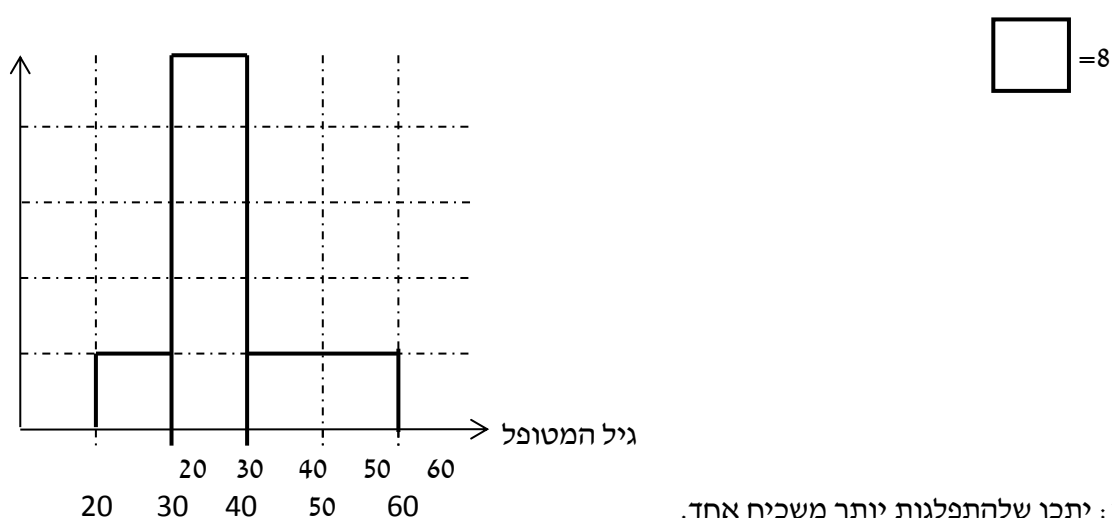


בטבלת שכיחויות במחלקות: אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר. התפלגות הציונים בכיתה.

f(x)	X
20	0-60
10	60-70
18	70-80
15	80-90
15	90-100

בהיסטוגרמה: שיעור ה- X של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.

להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים:



כללי: יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד. השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

MIDRANGE – (טווח)

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר.

$$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}$$

MEDIAN - החציון

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו .
 ברשימה : נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה : $\frac{n+1}{2}$

אם יש מספר זוגי של איברים החציון יהיה הממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$ והאיבר ה- $\frac{n}{2} + 1$

כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה : $md = X_{\frac{n+1}{2}}$

ושיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה : $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

בטבלת שכיחויות בדידה : נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

דיאגרמת מקלות : נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.

בטבלת שכיחויות במחלקות :

שלב א : נימצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה $\frac{n}{2}$.

שלב ב : נציב בנוסחה הבאה : $Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה החציונית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

היסטוגרמה : החציון הוא הערך על ציר ה- X שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים

בשטח.

כללי : החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

הממוצע

הנו מרכז הכובד של ההתפלגות.

ברשימה : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

בטבלת שכיחויות : $\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n}$

במחלקות : נשתמש באותה נוסחה רק נתייחס לאמצע המחלקה בתור ה- X . הממוצע הזה יהיה

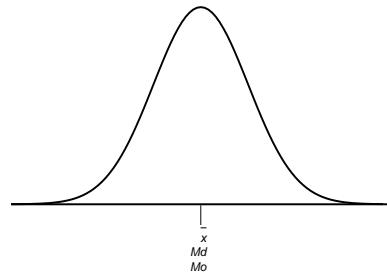
ממוצע מקורב.

כללי : הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:

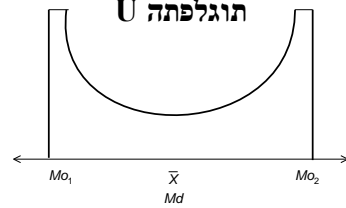
בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה:

התפלגות סימטרית



בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז:

תוגלפתה U

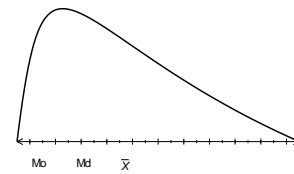


בהתפלגות אסימטרית

התפלגות א-סימטרית שמאלית או שלילית



התפלגות א-סימטרית ימנית או חיובית



תרגילים:

1. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא :
 7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6
 חשב את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.
2. בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8
 לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים : 5, 4, 3, 4 .
 א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?
 ב. מהו השכיח ומהו החציון?
3. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים :

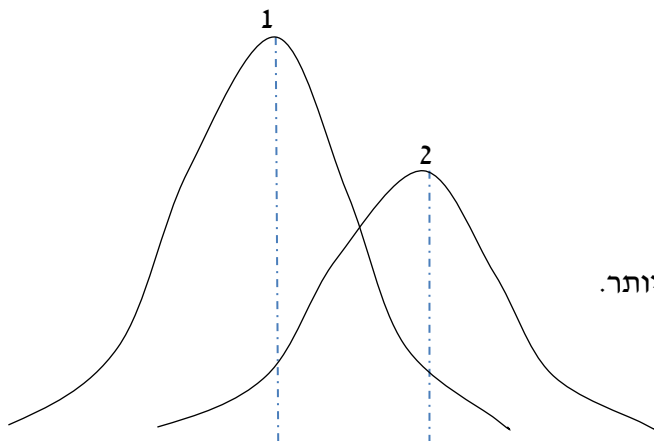
מספר מקלטים	מספר משפחות
0	22
1	28
2	18
3	22
4	10

- א. חשב את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.
 ב. הסבר ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.
 4. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

- א. כמה משפחות יש בישוב?
 ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?
 ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.
 הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!

5. מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה. בחר בתשובה הנכונה:



א. בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.

ב. בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.

ג. בשתי הכיתות אותו שכיח.

ד. לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

6. ביישוב מסוים בדקו לכל משפחה את מספר הטלוויזיות שיש לה בבית. ביישוב גרות 200 משפחות. בממוצע יש למשפחה 1.5 טלוויזיות.

מספר משפחות	מספר טלוויזיות
28	0
62	1
	2
	3

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו השכיח, אמצע טווח והחציון.

ג. חלק מהמשפחות להן הייתה טלוויזיה אחת בדיוק הוציאו את הטלוויזיה מביתם, כיצד כל מדד ישתנה (יגדל, יקטן או לא ישתנה) הסבירו ללא חישוב.

פתרונות:**שאלה 1:**

החציון : 7

השכיח : 6

הממוצע : 6.9

שאלה 2:

א. 3

ב. שכיח : 3,4 חציון : 4

שאלה 3:

א. הממוצע : 1.7

החציון : 1.5

השכיח : 1

ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.

שאלה 4:

א. 630

ב. 34.13%

ג. שכיח וחציון : 3

ממוצע : 2.952

שאלה 5:

תשובה : ב

שאלה 6:

ב חציון : 2 שכיח : 2 אמצע טווח : 1.5

פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור: הטווח, השונות וסטיית התקן

רקע:

המטרה: למדוד את הפיזור של הנתונים כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

הטווחותחום RANGE:

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר: $R = X_{\max} - X_{\min}$

שונות וסטיית תקן:

השונות היא ממוצע ריבועי הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור סדרת נתונים:}$$

דוגמה: נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה: 5,4,9

$$s_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור טבלת שכיחויות:}$$

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44

הציון X	השכיחות f	x ² · f	
5	2	50	
6	4	144	
7	8	392	
8	5	320	
9	4	324	
10	2	200	
		סה"כ	1430

$$s_x^2 = \frac{\sum x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$s = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

תרגילים:

1. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:

7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6
 חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

2. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ב"הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. חשבו סטיית התקן.

ב. חשבו את הטווח של הנתונים.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!

3. בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.

א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?

ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני

עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

4. נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע:

2, 3, 2, 1. - חשב את השונות של חמש התצפיות.

5. בשכונה בדיקה בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

מספר חדרים	פרופורציה
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

- א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?
- ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.
- ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע (יקטין, יגדל, לא ישנה) כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים.

פתרונות :**שאלה 1:**

השונות : 2.19

סטיית תקן : 1.48

טווח : 6

שאלה 2:

א. סטיית תקן: 1.106

ב. טווח 4

שאלה 3:

א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.

ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.

שאלה 4:

10.8

שאלה 5:

א. 3.05

ב. 1.16

פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון

רקע:

מדד זה הוא מדד לפיזור בנוסף למדדים שנלמדו בפרקים הקודמים כמו סטיית התקן.

המדד בודק את הפיזור הממוצע סביב החציון.

הרעיון הוא למצוא בכמה בממוצע התצפיות סוטות בערך המוחלט מהחציון.

כדי לחשב את המדד יש לחשב קודם כל את החציון.

אם מדובר ברשימה של תצפיות הנוסחה לחישוב המדד :

$$MAD = \frac{\sum_i |X_i - Md|}{n}$$

אם מדובר בטבלת שכיחויות, הנוסחה לחישוב המדד :

$$MAD = \frac{\sum |X_i - Md| \cdot f(X)}{n}$$

כאשר מדובר על טבלת שכיחויות במחלקות ניקח בתור X את אמצע המחלקה.

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

נתונה רשימת המספרים הבאה : 2 8 7 6 3

מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?

תרגילים:

1. נתונה רשימת המספרים הבאה : 3 5 6 9 12 8 . מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?

2. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים :

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

א. חשב את החציון.

ב. חשב את ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון.

ג. הסבר ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת היה משתנה אם 5 ממשפחות שהיה להם מקלט יחיד היו מוכרים אותו.

פתרונות:**שאלה 1 :**

2.5

שאלה 2:

א. 1.5

ב. 1.14

ג. חציון לא ישתנה וממוצע סטיות מוחלטות מהחציון יגדל.

פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - ציון תקן

רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמות יחסית לשאר התצפיות בהתפלגות.

ציון תקן:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S} : \text{הנוסחה לציון תקן של תצפית היא}$$

ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע.

כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע.

ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.

ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.

ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

במקום עבודה מסוים ממוצע המשכורות 8 אלפי ₪ עם סטית תקן של 2 אלפי ₪ באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים. מה ערך יותר באופן יחסי משכיל או משתכר ?

תרגילים

1. תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה. להלן התוצאות שהתקבלו:

מקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל: 68 בלשון ו70 במתמטיקה.

- א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?
 ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

2. במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.

להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים:

מספר פועלים	תפוקה	מספר מצברים
15	48	15
2	10	2

באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.

מה יותר חריג באותו היום יחסית לשאר הימים שנבדקו נתוני התפוקה או כמות הפועלים? בחר בתשובה הנכונה.

א. התפוקה.

ב. כמות הפועלים.

ג. חריגים באותה מידה.

ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

3. הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן 10 סנטימטר. המשקל

הממוצע 66 ק"ג עם סטיית תקן 8 ק"ג. ערך התגייס, גובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.

א. במה ערך חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים- גובהו או משקלו?

ב. כמה ערך אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

פתרונות:

שאלה 1:

א. לשון

ב. 72

שאלה 2:

תשובה ב

שאלה 3:

א. משקל

ב. 70

פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית

רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה של קבוע (או החסרה) והכפלה של קבוע (או חילוק) לכל

$$y = a \cdot x + b$$

וכך יושפעו המדדים השונים :

מדדי המרכז:

$$MR_y = a \cdot MR_x + b$$

$$Mo_y = a \cdot Mo_x + b$$

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$

$$Md_y = a \cdot Md_x + b$$

מדדי הפיזור:

$$R_y = |a| R_x$$

$$s_y = |a| s_x$$

$$s_y^2 = a^2 s_x^2$$

מדדי המיקום היחסי:

$$Y_p = a \cdot X_p + b$$

$$Z_Y = \frac{a}{|a|} Z_X$$

שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו b .
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

השכר הממוצע של עובדים הנו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪ חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב100 ₪.

תרגילים:

1. עבור סדרת נתונים התקבל:

$$\bar{X} = 80$$

$$S = 15$$

$$MO = 70$$

הוחלט להכפיל את כל התצפיות פי-4 ולהחסיר מהתוצאה 5. חשב את המדדים הללו לאחר השינוי.

2. בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה. הוחלט להעלות את כל המשכורות ב- 10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה. מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.

4. דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. קבלו שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא. עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים. מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקנים בקופסא?

פתרונות :**שאלה 2 :**

הממוצע : 46
השונות : 30.25

שאלה 1 :

הממוצע : 315
סטיית התקן : 60
השכיח : 275

שאלה 4 :

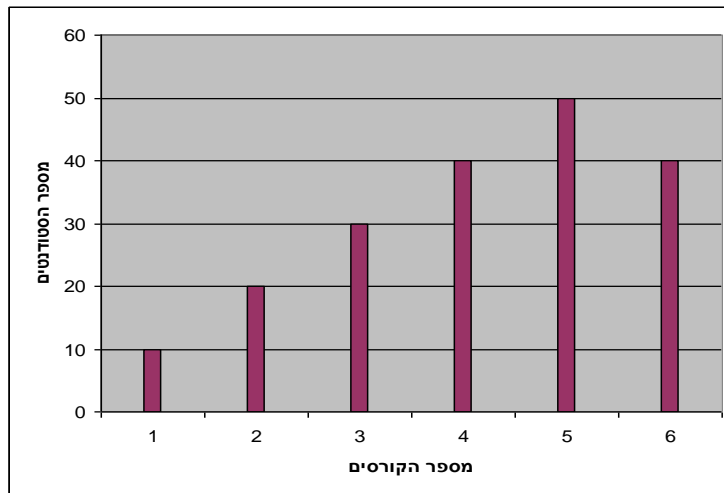
ממוצע : 37
סטיית תקן : 1.5

פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות

1. בדקו עבור 5 תלמידים את המשקל שלהם :

מספר תלמיד	משקל בק"ג
1	58
2	62
3	48
4	34
5	58

- א. מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
 ב. מהו המשקל החציוני, הממוצע והשכיח?
 ג. מה הטווח וסטיית התקן של המשקל?
 ד. לאותם תלמידים חישובו גם את הגובה בס"מ וקיבלו גובה ממוצע של 168 וסטיית תקן 6. במה תלמיד מספר 3 שגובהו 162 יותר חריג במשקל או בגובה?
 ה. הוסיפו עוד תלמיד השוקל 52 ק"ג בדיוק. הסבירו ללא חישוב כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן? (יגדילו יקטין או לא ישנה)
2. בפקולטה להנדסה אספה מזכירות הסטודנטים נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008.
 להלן התוצאות שהתקבלו :



- א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
 ב. מהי צורת ההתפלגות?
 ג. תאר את הנתונים בטבלת שכיחויות.
 ד. חשב את השכיח, החציון והטווח .

3. להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'. השתתפו במחקר 150 תלמידים.

$$\text{ממוצע הציונים שהתקבל: } \bar{X} = 7\frac{1}{15}$$

מספר התלמידים	ציון
12	4
16	5
	6
38	7
	8
14	9
10	10

- א. השלם את השכיחויות החסרות בטבלה.
 ב. חשב את הציון החציוני, השכיח.
 ג. חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.

4. חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדקה מידת שביעות הרצון של הלקוח מהחברה (1 – שביעות רצון נמוכה ועד 5 שביעות רצון גבוהה) להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר האנשים	שביעות רצון
40	1
60	2
50	3
30	4
20	5

- א. מה אחוז האנשים עם רמת שביעות רצון נמוכה?
- ב. מה המשתנה הנחקר ומאיזה סוג הוא?
- ג. מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר לתיאור הנתונים?
- i. היסטוגרמה.
- ii. דיאגרמת מקלות.
- iii. דיאגרמת עוגה.
- ד. חשבו את המדדים הבאים:
1. טווח
2. שכיח
3. חציון

פתרונות:**שאלה 1:**

- א. המשתנה הנחקר כאן הוא משקל תלמיד בק"ג והוא משתנה כמותי רציף.
ב.

$$\bar{X} = 52$$

$$Md = X_{\frac{n+1}{2}} = X_3 = 58$$

השכיח הוא 58

$$R = 28 \quad \text{ג.}$$

$$s = 10.12$$

- ד. הוא חריג יותר בגובה כי שם ציון התקן בערך מוחלט יותר גבוה.
ה. הממוצע לא ישתנה אך סטיית התקן תקטן.

שאלה 2:

- א. מספר הקורסים. בדיד.
ב. התפלגות אסימטרית שמאלית
ד. השכיח : 5
הטווח : 5

שאלה 3:

- א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40
תלמידים קיבלו ציון 8.
החציון : 7
השכיח : 8
ג. השונות : 2.533
סטיית התקן : 1.592

שאלה 4:

- א. 20%
ב. שביעות רצון (סדר)
ג. 2
ד. טווח : 4 שכיח : 2 חציון : 2.5
ה. חציון : 4

פרק 10 - בעיות בסיסיות בהסתברות

רקע :

ניסוי מקרי : תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך.
למשל : תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

מרחב מדגם : כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי :

בהטלת קובייה : $\{1,2,3,4,5,6\}$.
מזג האוויר בעוד שבועיים : $\{ \text{נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביד} \}$

מאורע : תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות : A, B, C, \dots

בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 : $A = \{5, 6\}$
לקבל תוצאה זוגית : $B = \{2, 4, 6\}$

גודל מרחב המדגם : מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם :

בהטלת הקובייה : $|\Omega| = 6$

גודל המאורע : מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו.

בהטלת הקובייה : $|A| = 2$ $|B| = 3$

מאורע משלים : מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים :

בהטלת הקובייה : $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$

מרחב מדגם אחיד (סימטרי) : מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

הסתברות במרחב מדגם אחיד :

במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה : $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

למשל, מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5? $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$

מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית? $p(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$

הסתברות במרחב לא אחיד :

יחושב לפי השכיחות היחסית : $\frac{f}{n}$

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת :

מספר התלמידים – השכיחות-f	הציון-X
2	5
4	6
8	7
5	8
4	9
2	10

א. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8? $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$

ב. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל?

$$\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$$

הסתברות למאורע משלים :

$$p(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל :

$$p(A) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$$

תרגילים:

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות.
- הרכב את כל המילים האפשריות.
 - רשום את המקרים למאורע:
 - A במילה נמצאת האות E.
 - B במילה האותיות שונות.
 - ג. רשום את המקרים למאורע \bar{A} .
2. מטילים זוג קוביות.
- רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?
 - רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:
 - A סכום התוצאות 7.
 - C מכפלת התוצאות 12.
 - ג. חשב את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיף ב.
3. בוחרים באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.
- א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?
 - ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?
 - ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?
4. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

- נבחרה משפחה באקראי מהישוב.
- א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?
 - ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?
 - ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר מכוניות	מספר משפחות
0	20
1	40
2	100
3	30
4	10

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

6. מטילים מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?

ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:

A- התקבל פעם אחת עץ.

D- התקבל לפחות פלי אחד.

ג. מהו המאורע המשלים ל-D.

ד. חשבו את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיפים ב- ג.

פתרונות:**שאלה 2**

ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$

הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$

שאלה 3

א. 0.4

ב. 0.4

ג. 0.5

שאלה 4

א. 0.22

ב. 0.78

ג. 0.32

פרק 11 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים

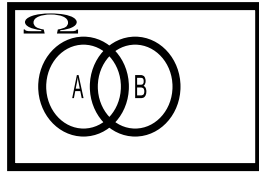
רקע:

פעולת חיתוך:

נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים, חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך:

$$A \cap B$$

מדובר בתוצאות שנמצאות ב-A וגם ב-B.



בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 : $A = \{5, 6\}$

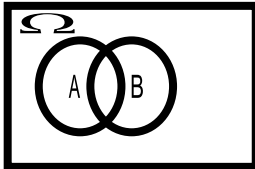
לקבל תוצאה זוגית : $B = \{2, 4, 6\}$

$$A \cap B = \{6\}$$

פעולת איחוד:

נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות. הסימון הוא: $A \cup B$ נותנת את

אשר נימצא ב-A או ב-B. כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.



בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 : $A = \{5, 6\}$

לקבל תוצאה זוגית : $B = \{2, 4, 6\}$

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה)

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8. ההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.

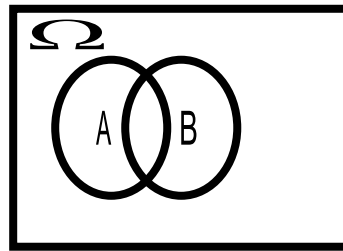
א. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?

ב. מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?

ג. מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

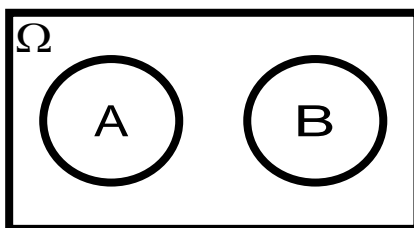
$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

שיטת ריבוע הקסם :

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם :

	\bar{A}	A	
B	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים : מאורעות שאין להם מהמשותף: לא יכולים להתרחש בו זמנית.



$$A \cap B = \{\}$$

$$P(A \cap B) = 0$$

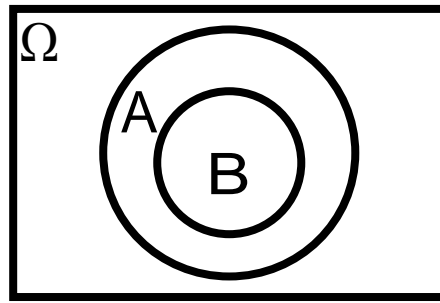
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

למשל, בהטלת קובייה

$$A = \{5, 6\} \quad \text{: לקבל לפחות 5}$$

$$B = \{3\} \quad \text{: לקבל 3}$$

$$A \cap B = \{\}$$

מאורעות מכילים :

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב-B מוכלות בתוך המאורע-A.

קשר זה מסומן באופן הבא: $B \subset A$

$$A \cap B = B$$

$$A \cup B = A$$

$$P(A \cap B) = P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A)$$

למשל:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

תרגילים:

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים :

-E במילה נמצאת האות E.

-F במילה אותיות שונות.

א. רשום את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.

ב. רשום את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.

2. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים :

-A לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.

-B לעבור את המבחן בכלכלה.

העזר בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמן בדיאגרמת וון את השטח המתאים :

א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.

ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.

ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.

ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.

ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.

ו. התלמיד נכשל בכלכלה.

3. נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.

א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים :

$$A =$$

$$B =$$

$$\bar{B} =$$

$$A \cap B =$$

$$A \cup B =$$

ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4. נסמן ב- Ω את מרחב המדגם וב- ϕ קבוצה ריקה.

נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.

להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A .

קבע עבור כל מאורע מה הפתרון שלו.

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\bar{A} \\
 &A \cap \phi \\
 &A \cup \phi \\
 &A \cap \Omega \\
 &A \cup \Omega \\
 &A \cap \bar{A} \\
 &\bar{\phi} \\
 &A \cup \bar{A}
 \end{aligned}$$

5. הוגדרו המאורעות הבאים :

A = אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B = אדם גובהו מתחת ל-1.8 מטר

קבע את גובהם של האנשים הבאים :

א. $A \cap B$

ב. $A \cup B$

ג. $\bar{A} \cap B$

ד. $\bar{A} \cup \bar{B}$

ה. \bar{A}

6. נגדיר את המאורעות הבאים :

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמש בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים דוברי 2 שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

7. שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08. מפלגת עתיד תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

8. במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

9. הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשב את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים :

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10. מטיילים זוג קוביות אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים :

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקוביות 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11. עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות :

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \quad p(B) = 0.3 \quad p(A) = 0.6$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשב את $p(\bar{A} \cap B)$

12. מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים :

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13. בהגרלה חולקו 100 כרטיסים על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר

הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

$$P(A) = 0.3$$

$$P(B) = 0.25$$

$$P(A \cup B) = 0.49$$

א. חשב את הסיכוי ל- $P(A \cap B)$

ב. האם A ו-B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או רק B יקרה?

15. A ו-B מאורעות זרים. נתון ש: $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B?

16. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. $A \cap B = B \cap A$

ב. $\overline{A \cup B} = A \cap B$

ג. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$

ד. $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

פתרונות:**שאלה 7**

א. 0.24

ב. 0.04

ג. 0.16

שאלה 8

א. 10%

ב. 50%

ג. 50%

שאלה 9

א. 0.2

ב. 0.3

ג. 0.3

שאלה 10

א. לא.

ב. כן.

ג. כן.

ד. לא.

שאלה 11

א. כן

ב. 0.3

שאלה 12

התשובה הנכונה ג

שאלה 13

א. 0.05

ב. 0.95

שאלה 14

א. 0.06

ב. לא זרים

ג. 0.43

פרק 12 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש בהינתן ש – מאורע B כבר קרה :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

במונה : הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.

במכנה : הסיכוי למאורע שנתון שהתרחש :

למשל,

נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית? (פתרון בהקלטה)

תרגילים:

1. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה :
 נגדיר את המאורעות הבאים : A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה. B- לעבור את המבחן בכלכלה.
 כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.
 הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים :
 - א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
 - ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
 - ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
 - ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
 - ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד מה ההסתברות שהוא יעבור את שני המבחנים?

2. במדינה שתי חברות טלפון סלולארי "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל". 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט".
 ל-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי בכלל.
 - א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
 - ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?
 - ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
 - ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?

3. במכללה שני חניונים : חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.
 - א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
 - ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
 - ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
 - ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

פתרונות:**שאלה 1**

- א. 0.833
- ב. 0.9375
- ג. 0.0625
- ד. 0.5
- ה. 0.789

שאלה 2

- א. 5%
- ב. 0.0833
- ג. 0.786
- ד. 0.6875

שאלה 3

- א. 0.4
- ב. $\frac{2}{3}$
- ג. 0.25
- ד. $\frac{6}{7}$

פרק 13 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

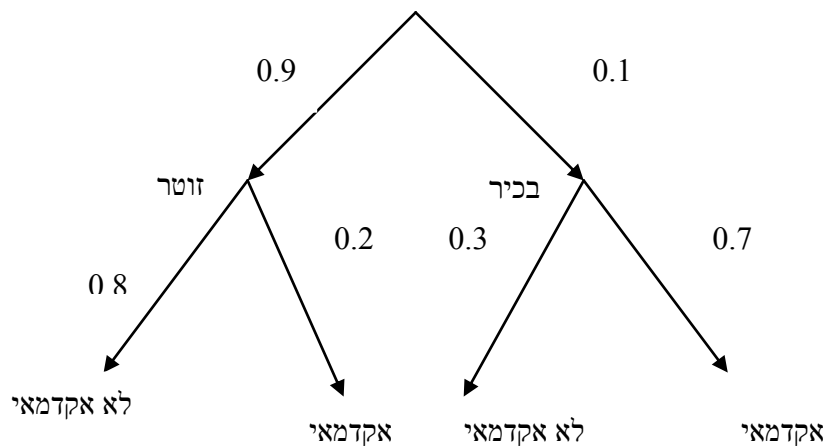
רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

למשל,

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים.
מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים.

נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.
נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

א. מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי?

$$0.1 * 0.7 = 0.07$$

ב. מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי?

$$0.9 * 0.8 = 0.72$$

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות)

ג. מה הסיכוי שהוא אקדמאי ?

$$0.1*0.7+0.9*0.2=0.25$$

ד. נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטרי?

מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות מותנה

$$P(zutar | academay) = \frac{0.9*0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72$$

נוסחת ההסתברות השלמה

B מאורע כלשהו, A_1, \dots, A_n חלוקה ממצה של Ω .

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i) \quad \text{אזי:}$$

נוסחת בייס

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j)P(B / A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B / A_i)}$$

תרגילים:

1. בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכרייה אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכרייה נוספת, אך אם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכרייה נוספת.
 - א. מה ההסתברות שהסוכרייה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?
 - ב. מה ההסתברות שהסוכרייה השנייה בטעם לימון?

2. באוכלוסיה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.
 - א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?
 - ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?
 - ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?
 - ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?

3. בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.
 - א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?
 - ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?

4. חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי:
 - 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל 70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.
 - א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?
 - ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?
 - ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

5. כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר אם נכשלתם במבחן מסוים אינכם ניגשים למבחן הבא אחריו.

70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון.

מתוכם 50% עוברים את המבחן השני.

מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.

א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?

ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?

ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6. משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:

מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.

מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.

30% מהתושבים הם ילדים ונוער.

50% הם מבוגרים.

היתר קשישים.

כמו כן נתון ש-68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.

א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?

ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7. רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A B C D.

אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור.

כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.

א. מה הסיכוי ש האנייה תתגלה ע"י הרדאר?

ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?

ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?

8. סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C.

סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו.

לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן:

8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%. במחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.

א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?

ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

פתרונות:**שאלה 1**א. $2/7$ ב. $23/49$ **שאלה 2**

א. 6%

ב. 58%

ג. 0.241

ד. 0.2

שאלה 3

א. 0.544

ב. 0.5

שאלה 4

א. 9%

ב. 0.09375

ג. 0.9722

שאלה 8

א. 0.0886

ב. 0.2889

ג. 0.3137

ד. 0.8778

פרק 14 - תלות ואי תלות בין מאורעות

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A) = p(B)$ נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב-A.

הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B) = p(A)$ כלומר A אינו תלוי גם ב-B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

הוכחה לכך:

$$P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים

בתרגיל או שמהקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח

בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$p(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1-0.7)(1-0.4) = 0.18$$

באופן דומה:

הרחבה: אי תלות בין n מאורעות

n מאורעות A_1, \dots, A_n הם בלתי תלויים אם ורק אם:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

תרגילים:

1. נתון:

$$p(A) = 0.2$$

$$P(B) = 0.5$$

$$P(A \cup B) = 0.6$$

האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2. תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו. הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון

הוא 0.7 והשני 0.4 .

א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?

ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים ?

3. במדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4. מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא

יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4

הבדיקות.

א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?

ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בבדיקה אחת?

5. מדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

פתרונות :**שאלה 1**

בן

שאלה 2

א. 0.28

ב. 0.18

שאלה 3

א. 0.0064

ב. 0.1536

שאלה 4

א. 0.5904

ב. 0.9984

פרק 15 - שאלות מסכמות בהסתברות

1. נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
- א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?
 ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?
 ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית. מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?
 ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?
2. במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א' 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%. כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.
- א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?
 ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג?
 ג. ברכישת חלב נימצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א?
 ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו- "יוצר במחלבה א" בלתי תלויים?
3. רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילויים עם מספר אפשרויות בילוי:
 בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג
 בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה
 בהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם, באולינג/קפה.
- א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?
 ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" זרים?
 ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" תלויים?
 ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

4. 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.
- א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?
 ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?
 ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?
 ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?
5. באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.
- א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?
 ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?
 ג. נגדיר את המאורעות הבאים:
 A - נבחר אדם מובטל
 B - נבחר גבר
 האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?

פתרונות:**שאלה 1**

א. 0.25

ב. 0.75

ג. 0.6

ד. 0.5

שאלה 2

א. 0.2

ב. 0.267

ג. 0.524

ד. המאורעות תלויים.

שאלה 3

א. 0.2

ב. המאורעות אינם זרים.

ג. המאורעות הללו תלויים.

ד. 0.06

שאלה 4

א. 0.94

ב. 0.255

ג. 0.03

ד. 0.168

שאלה 5

א. 15%

ב. 0.692

ג. לא זרים ותלויים.

פרק 16 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

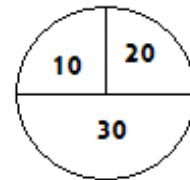
רקע:

משתנה מקרי בדיד : הנו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות. מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית ההסתברות.

פונקציית ההסתברות : פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה.

סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

למשל, בקזינו יש רולטה כמוראה בשרטוט :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד (פתרון בהקלטה).

תרגילים:

1. ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה הוא :
 - 50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
 - 70 משפחות עם מכונית אחת.
 - 60 משפחות עם 2 מכוניות.
 - 20 משפחות עם 3 מכוניות .
 בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את X להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה.
 בנו את פונקציית ההסתברות של X .

2. מהאותיות C, B, A יוצרים קוד דו תווי.
 - א. כמה קודים ניתן ליצור?
 - ב. רשמו את כל הקודים האפשריים
 - ג. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד, בנו את פונקציית ההסתברות של X .

3. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה.
 כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

4. הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ – 4 פעמים. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

5. חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7. הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8. הסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את X להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

6. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי
כלשהו :

$$P(X = k) = \frac{k}{A}$$

$$k = 1, 2, \dots, 4$$

מצא את ערכו של A.

פתרונות**שאלה 3**

2	1	0	x
0.75	0.20	0.05	P(x)

שאלה 4

4	3	2	1	x
0.343	0.147	0.21	0.3	P(x)

שאלה 5

3	2	1	0	X
0.504	0.398	0.092	0.006	P(x)

שאלה 6

10

פרק 17 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן

רקע:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu$$

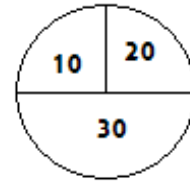
$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

תוחלת – ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

שונות – תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

סטיית תקן – שורש של השונות. – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת.

למשל, בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.

30	20	10	x
0.5	0.25	0.25	P(x)

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5$$

$$= 68.75 = \sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$

תרגילים:

1. אדם משחק במשחק מזל. נגדיר את X להיות סכום הזכייה. להלן פונקציית ההסתברות של X :

X	-30	0	20	40
$p(X)$	0.4	0.1	0.3	0.2

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של X ?

2. בישוב מסוים שני סניפי בנק, בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים של הישוב. ל-40% חשבון בנק בסניף הלאומי של הישוב. ל-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון בנק בישוב. יהי X מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש חשבון. חשב את $E(X)$

3. ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות.

נגדיר את X להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .

ב. חשבו את התוחלת וסטית תקן של X .

4. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

ב. חשב את התוחלת והשונות של X .

5. נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X :

8	6	4	2	x
0.2		0.3		P(x)

כמו כן נתון ש: $E(X) = 4.2$

א. מצא את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשב את $V(X)$.

6. משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 5- ו 0 ו 5. נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10. מצא את פונקציית ההסתברות.

פתרונות:**שאלה 1**

תוחלת : 2 שונות : 796

שאלה 3

ב . תוחלת : 3.36 סטיית תקן : 1.603

שאלה 4

א.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

ב . תוחלת : 3

שונות 2

שאלה 5

א.

8	6	4	2	x
0.2	0.1	0.3	0.4	P(x)

ב . 5.16

שאלה 6

5	0	-5	x
0.2	0.6	0.2	P(x)

פרק 18 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית

רקע

מצב שבו מבצעים הכפלה של קבועה ו או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי. (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע)

$$Y = aX + b \quad \text{אם}$$

אזי:

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X)$$

$$\sigma_Y = |a| \sigma_x$$

שלבי העבודה:

1. נוהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונוהה את ערכי a ו b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה - הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 ₪ מהי התוחלת והשונוות של הרווח במשחק ?

פתרון (בהקלטה)

חישבנו קודם ש :

$$E(X) = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = 68.75 = \sigma^2$$

תרגילים:

1. סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשב את התוחלת והשונויות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שסיים היא 3.5 עם שונות 2.
2. תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינו 10 עם שונות 3 הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12. מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?
3. תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן לעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?
4. X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X) = 4$ ו- $V(X) = 3$.
 Y הינו משתנה מקרי חדש עבורו $Y = 7 - X$.
 חשב את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.
5. אדם החליט לבטח את רכבו, שווי רכבו 100,000 ₪.
 להלן התביעות האפשריות והסתברותן:
 בהסתברות של $1/1000$ תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).
 בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב.
 בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב.
 אחרת אין תביעה בכלל.
 החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.
 נסמן ב- X את גובה התביעה השנתית באלפי ₪
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
 ב. חשבו את התוחלת והשונויות של גובה התביעה.
 ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪, מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

פתרונות :

שאלה 1:

תוחלת: 14 שונות: 32

שאלה 2:

תוחלת: 8 שונות: 12

שאלה 3:

תוחלת: 13.2

סטיית תקן : 5.5

שאלה 4:

תוחלת: 3

שונות: 3

פרק 19 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:
ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון" כמו: מוצר פגום או תקין אדם עובד או מובטל עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.

בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה. מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב p את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד וב q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

ואז נגיד ש: $X \sim B(n, p)$.

פונקציית ההסתברות של X :

$$k = 0, 1, 2, \dots, n; P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{לכל}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad ; \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \quad ; \quad 0! = 1 \quad \text{כאשר}$$

לגודל: $\binom{n}{k}$ ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

$$E(X) = np \quad \text{תוחלת}$$

$$V(X) = npq \quad \text{שונות}$$

שימו לב כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

(1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.

(2) חוזרים על הניסוי n פעמים.

(3) X – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

א. מהי ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?

ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

תרגילים:

1. במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה.
נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
- מהי ההתפלגות של X ?
 - מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
 - מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
 - מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?
 - מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?
 - מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?

2. על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארט-פון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את X כמספר האנשים שנדגמו עם סמארט-פון.

- מהי ההתפלגות של X ? הסבירו.
- מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?
- מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?
- מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?

3. בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב-20 ₪, בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית הימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.
- מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?
 - מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?
 - מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-30 ₪ שהשקיע?
 - מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?

4. במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

- נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30 מהמדינה הנ"ל.
- מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
 - מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

5. במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
- א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?
- ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?
6. במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה היא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.
- א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?
- ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?
- ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?
7. 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.
- א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?
- ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?

פתרונות :שאלה 7 :

- א. 0.401
 ב. תוחלת : 8.025
 סטיית תקן : 2.193

שאלה 2 :

- ב. 0.2335
 ג. 0.1493
 ד. תוחלת : 7
 סטיית תקן : 1.449

שאלה 3 :

- א. 0.5314
 ב. 0.0984
 ג. 0.1143
 ד. תוחלת : -18
 סטיית תקן : 14.697

שאלה 4 :

- א. 0.1789
 ב. 2

שאלה 5 :

- א. 0.1956
 ב. 0.4253

שאלה 6 :

- א. 0.85
 ב. 0.182
 ג. תוחלת : 82 נקודות
 שונות : 91.8 נקודות

פרק 20 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות גיאומטרית

רקע:

חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי.
 X – מוגדר להיות מספר הניסויים שבוצעו עד ההצלחה הראשונה כולל.
 נסמן ב p את הסיכוי להצלחה בניסויי בודד וב- q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

$$X \sim G(p)$$

פונקציית ההסתברות:

$$k = 1, 2, \dots, \infty \quad P(X = k) = pq^{k-1}$$

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{תוחלת:}$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2} \quad \text{שונות:}$$

תכונות חשובות :

אם X מתפלג על פי התפלגות גיאומטרית, אזי X הוא בעל תכונת חוסר זיכרון, דהיינו,
 $P(X = n + k) / X > k = P(X = n)$

$$P(X > k) = q^k$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בכד 10 כדורים ש- 3 מהם ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור אחר כדור עד שבידו כדור ירוק.
 ההוצאה היא עם החזרת הכדור לכד בכל פעם מחדש.

- א. מהי ההתפלגות של מספר הכדורים שהוצאו?
- ב. מה ההסתברות שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- ג. מה ההסתברות שהוצאו יותר מ- 5 כדורים?
- ד. אם הוצאו יותר מ- 3 כדורים. מה הסיכוי שהוצאו בדיוק 5 כדורים?
- ה. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הכדורים שהוצאו?

תרגילים:

1. קו ייצור המוני מייצר מוצרים כך ש 5% מהם פגומים. איש בקרת איכות דוגם באופן מקרי מוצרים מקו הייצור עד אשר בידו מוצר פגום. חשבו את ההסתברויות הבאות:
 - א. שידגום 3 מוצרים.
 - ב. שידגום 4 מוצרים.
 - ג. שידגום 5 מוצרים.
 - ד. שידגום יותר מ-7 מוצרים.
 - ה. שידגום לא פחות מ-8 מוצרים.

2. צילום שמבוצע במכון הרנטגן "X-RAY" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9. אדם נכנס למכון כדי להצטלם. הוא ייצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.
 - א. מה ההסתברות שיצטלם בסך הכול 3 פעמים?
 - ב. מה ההסתברות שהצטלם יותר מ-4 פעמים?
 - ג. מה התוחלת ומה השונות של מספר הצילומים שייבצע?
 - ד. כל צילום עולה למכון 50 ₪. אדם משלם על צילום תקין 100 ₪. מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?

3. מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".
 - א. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?
 - ב. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?
 - ג. אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי" מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?
 - ד. מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?

4. 30% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. בכל יום נכנסות לחניון 10 מכוניות אקראיות.
 - א. מה ההסתברות שביום מסוים בדיוק מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?
 - ב. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום עד שלראשונה מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?

5. אדם משחק במשחק מזל עד אשר הוא מפסיד. הצפי הוא שישחק את המשחק 10 פעמים. מה הסיכוי להפסיד במשחק בודד?

- א. מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 6 פעמים?
- ב. מה ההסתברות שישחק את המשחק לכל היותר 12 פעמים?
- ג. ידוע שהאדם שיחק את המשחק יותר מ-6 פעמים, מה ההסתברות שישחק את המשחק בדיוק 10 פעמים?
- ד. מהי סטיית התקן של מספר הפעמים שישחק את המשחק?

6. במאפייה מייצרים עוגת גבינה ועוגת שוקולד שנארזות באריזות אטומות. 40% מהעוגות הן עוגות גבינה והיתר עוגות שוקולד. התונית על האריזה מודבקת בשלב מאוחר יותר של הייצור. אדם נכנס למפעל ובוחר באקראי עוגה.

- א. מה ההסתברות שייאלץ לבחור 5 עוגות עד שקיבל עוגת שוקולד?
- ב. אם הוא דגם פחות מ-7 עוגות עד שיקבל עוגת שוקולד, מה ההסתברות שבפועל הוא דגם יותר מ-4 עוגות?
- ג. האדם דוגם עוגות עד אשר הוא מוצא עוגת שוקולד ידוע שעוגת גבינה עולה לייצרן 50 שקלים ועוגת שוקולד 30 שקלים. מהי התוחלת ומהי השונות של עלות הייצור הכוללת של העוגות שדגם?
- ד. בהמשך לסעיף הקודם, מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר עוגת הגבינה שדגם האדם?

פתרונות :**שאלה 2 :**

- א. 0.009
 ב. 0.0001
 ג. תוחלת : 1.111
 שונות : 0.1234
 ד. תוחלת : 44.4
 שונות : 308.5

שאלה 3 :

- א. 0.999
 ב. 0.875
 ג. 0.03125
 ד. 1

שאלה 4 :

- א. 0.1029
 ב. 9.72

שאלה 5 :

- א. 0.06
 ב. 0.7176
 ג. 0.0729
 ד. 9.487 משחקים

שאלה 6 :

- א. 0.015
 ב. 0.0215
 ג. תוחלת $63\frac{1}{3}$, שונות $2777\frac{7}{9}$
 ד. תוחלת $\frac{2}{3}$, שונות 1.054

פרק 21 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות פואסונית

רקע :

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן. λ - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן. כלומר, כמה בממוצע אירועים קורים ביחידת זמן.

$$X \sim \text{pois}(\lambda)$$

התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$P(X = K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}$$

$$K = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר λ פורפורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

- מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
- מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?
- מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?
- מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

תרגילים:

1. במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
 - א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
 - ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
 - ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
 - ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?

2. מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
 - א. מה ההסתברות שבחלק זה בדיוק 18 טעויות?
 - ב. אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בחלק ישנן 15 טעויות?
 - ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?

3. מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
 - א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
 - ב. מהי ההסתברות שבחודש (הנח שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?

4. לחנות AMPM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.
 - א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?
 - ב. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?
 - ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?
 - ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?

5. מספר הלידות בבית חולים מסוים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.
 - א. מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?
 - ב. מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?
 - ג. מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

6. במערכת אינטרנט לתשלום חשבונות, מספר החשבונות המשולמים בשעה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 30.

א. כמה שעות צפויות לעבור עד אשר תתקבל שעה עם בדיוק 33 חשבונות?

ב. בין השעה 08:00 ל-08:20 היו 18 חשבונות, מה ההסתברות שבין 08:00 ל-08:10 היו בדיוק 6 חשבונות?

פתרונות :**שאלה 1:**

א. 0.0337

ב. 0.9933

ג. 0.1246

ד. 5

שאלה 2:

א. 0.084

ב. 0.099

ג. 0.151

שאלה 3:

א. 4

ב. 0.407

שאלה 5:

א. 0.2388

ב. 0.2196

ג. 0.6948

שאלה 6:

א. 16.7

ב. 0.0708

פרק 22 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות

תרגילים:

2. ערך משחק בקזינו בשתי מכוונות הימורים. משחק אחד בכל מכוונה (במכוונה א' ובמכוונה ב'). הסיכוי שלו לנצח במשחק במכוונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכוונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.
- א. מה הסיכוי שערך ניצח בשני המשחקים?
 ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערך?
 ג. אם ערך נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערך ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?
3. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.
- א. בנה את פונקציית ההסתברות של X .
 ב. חשב את התוחלת והשונות של X .
 ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת הדלת?
4. מספר התקלות בשידור "בערוץ 1" מתפלג פואסונית בקצב של 6 תקלות ביום.
- א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?
 ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?
 ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?
5. בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.
- א. מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?
 ב. יהי X - מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתחתה ביום א' בבוקר, עד (וכולל) שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ. מהי פונקציית ההסתברות של X ?
 ג. מהי תוחלת מס' המוצרים **מתוצרת חוץ** שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?
 ד. ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?

6. חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית. חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל. להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:
- הסרט "הצבי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.6.
 - הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.7.
 - הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.2.
- ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.
 - ב. מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?
 - ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?
7. במפעל מייצרים סוכריות כך ש 20% מהסוכריות בטעם תות. הייצור הוא ייצור המונו. שאר הסוכריות בטעמים שונים, השקיות נארזות ובכל שקית בדיוק 5 סוכריות.
- א. נבחרה שקית ונתון שבשקית פחות מ-3 סוכריות אדומות. מה ההסתברות שבשקית סוכריה אדומה אחת?
 - ב. בוחרים באקראי שקית אחר שקית במטרה למצוא שקית ללא סוכריות אדומות. מה ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 שקיות?

פתרונות :**שאלה 2:**

א. 0.03

ב. תוחלת : 0.15, שונות 0.1875

ג. 0.1328

שאלה 3:

א.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

ב. תוחלת : 3

שונות : 2

ג. תוחלת : 1.5

שונות 0.5

שאלה 4:

א. 0.9975

ב. 0.0172

ג. 1.0025

שאלה 5:

א. 0.375

ג. 0.6

ד. 0.282

שאלה 6:

ב. תוחלת : 1.5

שונות 0.61

ג. תוחלת : 0

סטיית תקן : 4.68

שאלה 7:

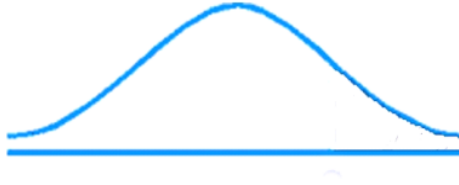
א. 0.4348

ב. 0.0923

פרק 23 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כמו: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה. אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} : \text{נוסחת פונקציית הצפיפות}$$

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלבנטים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון.

התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת והיא תסומן באות Z .

$$Z \sim N(0, 1^2)$$

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה:

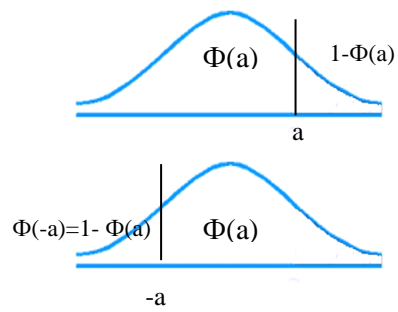
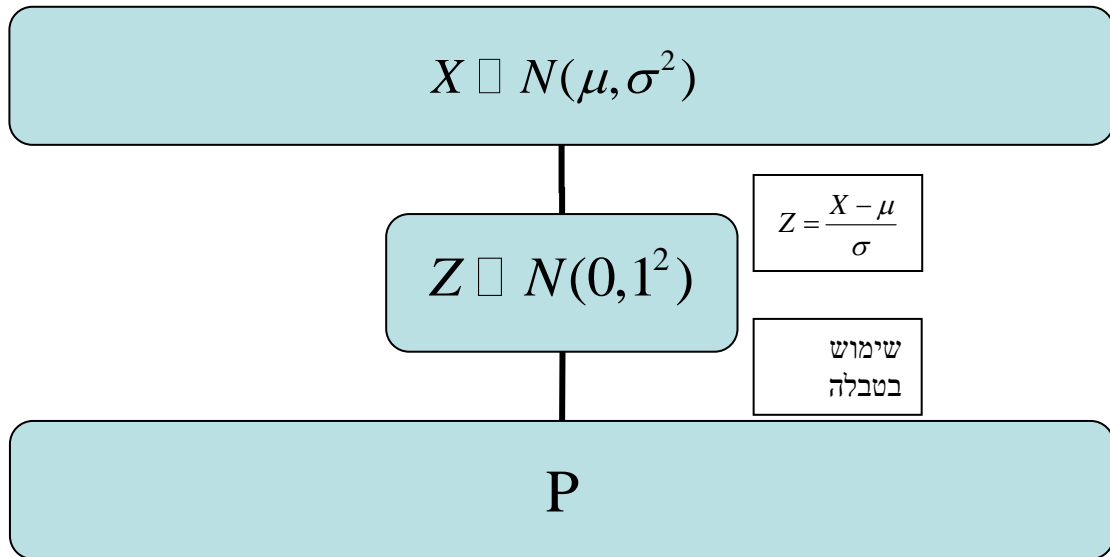
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן.

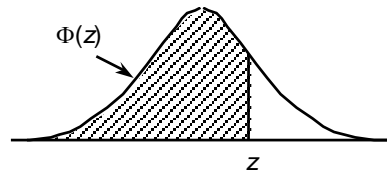
ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי.

ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה :



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- א. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל- 110 גרם?
- ב. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מעל 110 גרם?
- ג. מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל 92 גרם?
- ד. מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

תרגילים:

1. הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.

- א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 182.4 ס"מ?
- ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
- ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
- ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 170 ס"מ?
- ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2. נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות .

- א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
- ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
- ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
- ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

3. המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטית תקן של 8 ק"ג .

- א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ- 55 ק"ג?
- ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
- ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל- 70 ק"ג?
- ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ- 4 ק"ג?
- ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל- 140 ק"ג?

4. משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטית תקן 400 גרם.

- א. מצאו את העשירון העליון.
- ב. מצאו את האחוזון ה-95.
- ג. מצאו את העשירון התחתון.

5. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 ושונוות 225 .
- מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
 - מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
 - מהו הציון ש- 20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
 - מהו האחוזון ה- 20?
 - מהו הציון ש- 5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
6. נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, נתון ש-33% מהבקבוקים הם עם נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- מה ממוצע נפח משקה בבקבוק ?
 - 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בבקבוק לבדיקה?
 - 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
7. אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית . ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ- 500 שעות, כמו כן ידוע ש- 67% מהמכשירים חיים פחות מ- 544 שעות.
- מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
 - מהי סטיית בתקן של אורך חיי מכשיר?
 - מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ- 460 שעות?
 - מהו המאון העליון של אורח חיי מכשיר?
 - 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

8. להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.



- א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
 ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו 2 זהות?
 א. בעשירון העליון.
 ב. בממוצע.
 ג. בשונות.

ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

- א. 1
 ב. 2
 ג. 3
 ד. אין לדעת.

9. הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

- א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?
 ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?
 ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ- 50 דקות?
 ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

10. ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל-T דולר היא 0.98976.
- א. מה ערכו של T?
- ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?
- ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
11. אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטיית תקן של שלושים שניות.
- א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל 2.5 דקות?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
- ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ 3.5 דקות?
- ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

פתרונות :

<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 1</u>
א. 26.43%	א. 89.25%
ב. 89.44%	ב. 2.28%
ג. 39.44%	ג. 0
ד. 0.383	ד. 50%
ה. 100%	

<u>שאלה 7</u>	<u>שאלה 5</u>
א. 500	א. 119.2
ב. 100	ב. 80.8
ג. 0.3446	ג. 112.6
ד. 733	ד. 87.4
ה. 267	

<u>שאלה 9</u>	<u>שאלה 8</u>
א. 0.1587	א. 3
ב. 0.0228	ב. בממוצע.
ג. 0.8563	ג. 1
ד. 0.3975	

<u>שאלה 11</u>	<u>שאלה 10</u>
א. 0.1359	א. 1925
ב. 0.675	ב. 0.2266
ג. 100	ג. 0.1587
ד. 0.25	

פרק 24 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

רקע:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} : \text{ בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם}$$

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים. להלן רשימה של

פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2 .

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ .

א. תכונות התפלגות

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה:

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$$

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n . תכונה זו נכונה רק

במדגם מקרי:

$$V(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם טעות תקן:

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

ב. דגימה מהתפלגות נורמאלית

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2 ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם. מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

ג. משפט הגבול המרכזי

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק גדול ($n \geq 30$)

$$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם. דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל 102 גרם?

תרגילים :

1. מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
 - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
 - מהי טעות התקן?
2. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים :

מספר משפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N = 10000$	

- נגדיר את x להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית.
- בנו את פונקציית ההסתברות של x .
 - חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של x .
 - אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?
3. אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

4. משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם
א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.

ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?

ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?

ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?

ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

5. הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.

א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?

ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?

ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?

ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

6. הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים. לצורך פתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.

א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?

ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?

ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?

7. נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.

א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?

ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?

ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?

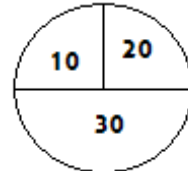
ד. בקבוקי היין שבארגז נמוזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

8. משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4 .

א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?

ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9. בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?

ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?

ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10. לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11. מטילים קובייה 50 פעמים בכל פעם מתבוננים בתוצאה של הקובייה. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72 ב-50 ההטלות?

12. אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ .

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה

ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה

קטן מ-69 ס"מ. העזר במשפט הגבול המרכזי.

13. נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה :

2	4	6	8	X
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	P(X)

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50 . מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14. נתון ש $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם \bar{X} :

לכן $P(\bar{X} > \mu)$ יהיה : (בחר בתשובה הנכונה)

א. 0

ב. 0.5

ג. 1

ד. לא ניתן לדעת.

15. נתון ש X מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2 .

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים ש :
(בחר בתשובה הנכונה)

א. $X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

ב. $\mu \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

ג. $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$

ד. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{200})$

16. נתון ש $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ אזי :

(בחר בתשובה הנכונה)

א. μ ו- \bar{X} יהיו משתנים מקריים.

ב. μ יהיה משתנה מקרי ו \bar{X} קבוע.

ג. \bar{X} יהיה משתנה מקרי ו μ קבוע.

ד. μ ו \bar{X} יהיו קבועים.

17. משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם . החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.
א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

18. משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20. מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

פתרונות:**שאלה 2**

א.

4	3	2	1	0	X
0.05	0.3	0.35	0.25	0.05	P(x)

$$\mu = 2.05 \quad \sigma^2 = 0.9475 \quad \sigma = 0.973 \quad \text{ב.}$$

$$\mu_{\bar{x}} = 2.05 \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369 \quad \text{ג.}$$

$$\sigma(\bar{X}) = 0.486$$

שאלה 3

$$\mu_{\bar{x}} = 3.5$$

$$\sigma(\bar{X}) = 1.21$$

שאלה 4

א. 0.8413

ב. 0.0013

ג. 0

ד. 0.1974

שאלה 6

א. 0.0465

ב. 27.71

ג. 0.2628

שאלה 7

א. 0

ב. 0.1587

ג. 0.1587

ד. 0.5

שאלה 8

א. 0.5468

ב. 0.6826

שאלה 9

א.

30	20	10	
0.5	0.25	0.25	$P(x)$

ב. התוחלת: 22.5

השונות: 68.75

ג. התוחלת: 22.5

השונות: 13.75

ד. 0.8997

שאלה 10

0.0475

שאלה 11

0.1814

שאלה 12

א. 0.9772

ב. 0.0228

ג. 271

שאלה 14

התשובה ב

שאלה 15

התשובה ד

שאלה 16

התשובה ג

שאלה 17

א. 2.429

ב. 0.25